

Erlaubte und verbotene Gebiete bei der Bewegung elektrisch geladener Teilchen in axial-symmetrischen Magnetfeldern

Von H. FISSEN und R. KIPPENHAHN

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München
(Z. Naturforsch. 14 a, 37–46 [1959]; eingegangen am 30. August 1958)

The trajectories of a charged particle in a magnetic field of rotational symmetry can be characterized by their two integrals of motion: the kinetic energy I_2^2 and the generalized angular momentum I_1 . Orbita with different values of I_1 and I_2 correspond to different points in the I_1 – I_2 -plane. By the aid of this I_1 – I_2 -diagram we easily can get a survey of the allowed and forbidden regions in the meridional plane. In another diagram the boundaries of these regions are transformed into straight lines. Both methods are applied to the field of a magnetic dipole and to that of a circular line-current. By the example of the circular current it is shown how the problem of the so-called particle-loss can be attacked.

Die Bewegung eines geladenen Teilchens der Ruhmasse m_0 und der Ladung Ze in einem Magnetfeld wird durch die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right) = \frac{Ze}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{B}] \quad (1)$$

(v Teilchengeschwindigkeit, c Lichtgeschwindigkeit) beschrieben. Wenn das Magnetfeld axial-symmetrisch zur z -Achse ist, so läßt es sich in zylindrischen Polarkoordinaten (s, φ, z) in der Form

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{s} \left\{ \frac{\partial F}{\partial z}, T, -\frac{\partial F}{\partial s} \right\} \quad (2)$$

darstellen. Dabei sind s der Abstand von der z -Achse, F und T zwei Funktionen von s und z .

Es lassen sich nun zwei Integrale I_1 , I_2 der Bewegungsgleichung (1) sofort angeben¹, wenn man \mathfrak{B} in der speziellen Form (2) annimmt. Es ist

$$I_1 = s v_\varphi - \frac{Ze}{m c} F = s v_\varphi - F^*; \quad \left(F^* = \frac{Ze}{m c} F \right) \quad (3)$$

$$I_2 = \sqrt{v_s^2 + v_\varphi^2 + v_z^2} \geqq 0. \quad (4)$$

Dabei ist I_1 abgesehen vom Faktor m der zum Winkel φ kanonisch konjugierte Impuls, I_2 bis auf $\sqrt{m/2}$ die Wurzel aus der kinetischen Energie. Die im folgenden beschriebene Methode der Bestimmung der erlaubten und verbotenen Gebiete bestimmter Teilchenbahnen in Magnetfeldern ist entstanden aus der Übertragung eines von LINDBLAD² benutzten Verfahrens zum Studium der Bewegungsvorgänge in der Milchstraße auf das Problem der Bewegung eines geladenen Teilchens in einem axial-symmetrischen Magnetfeld. Die Bewegung eines Sterns im Gravitationsfeld der Milchstraße erfolgt zwar wesentlich anders als die eines Teilchens unseres Problems; trotzdem bestehen mehrere formale

Ähnlichkeiten zwischen beiden Problemen. So tritt in der Himmelsmechanik die potentielle Energie als die das Gravitationsfeld beschreibende Funktion im Energieintegral auf. Hier enthält das Energieintegral nur Geschwindigkeiten, während im Analogon des Drehimpulses die das Magnetfeld beschreibende Funktion F auftritt.

Dem in Abschn. 2 behandelten Verfahren wird in Abschn. 3 das geometrisch duale gegenübergestellt, das in vieler Hinsicht wesentlich anschaulicher und einfacher erscheint. Beide Verfahren haben gewisse Vor- und Nachteile, so daß man bei der Untersuchung von Bahnen in einem vorgegebenen Feld zweckmäßigerweise beide Verfahren nebeneinander benutzt.

1. Die Darstellung durch charakteristische Geradenpaare

Man betrachte die I_1 , I_2 -Ebene (Abb. 1³); jedem ihrer Punkte entsprechen Teilchen, deren Bewegung so verläuft, daß ihnen gemäß (3) und (4) das Wertepaar (I_1, I_2) zukommt. Nun können Bahnen, die einen Punkt s_0, z_0 der Meridianebene durchsetzen, nicht beliebige Wertepaare (I_1, I_2) besitzen. Gemäß (4) ist $I_2 \geqq 0$, so daß nur Punkte der oberen Halbebene von Bedeutung sind. Zum anderen muß

$$v_s^2 + v_z^2 = I_2^2 - v_\varphi^2 = I_2^2 - \frac{1}{s_0^2} (F^* + I_1)^2 \geqq 0 \quad (5)$$

sein. Deshalb müssen alle Bildpunkte sowohl oberhalb der I_1 -Achse als auch oberhalb des Geraden-

¹ R. LÜST u. A. SCHLÜTER, Z. Naturforsch. 12 a, 841 [1957].

² Vgl. etwa v. d. PAHLEN, Lehrbuch der Stellar-Statistik, Joh. Ambr. Barth, Leipzig 1937, S. 878.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

paares

$$I_2 = \pm \frac{1}{s_0} [I_1 + F^*(s_0, z_0)] \quad (6)$$

liegen, also in dem in Abb. 1 schraffierten Gebiet. Das Geradenpaar (6) soll im folgenden das *charakteristische Geradenpaar* des Punktes s_0, z_0 heißen, das in Abb. 1 schraffierte Gebiet das *Normalgebiet* des Punktes s_0, z_0 .

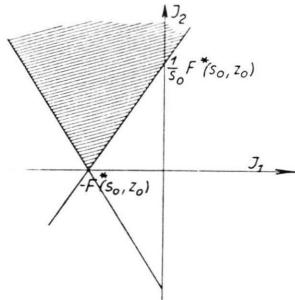


Abb. 1. Das zu einem Punkt (s_0, z_0) der Meridianebene gehörende Normalgebiet im I_1 - I_2 -Diagramm.

Das charakteristische Geradenpaar hat seinen Schnittpunkt auf der I_1 -Achse bei $I_1 = -F^*$. Die Achsenabschnitte auf der I_2 -Achse sind $\pm 1/s_0 \cdot F^*$. Die in der oberen Halbebene liegenden Punkte des Geradenpaars (6) entsprechen gemäß (5) Bahnen, für die im Punkt s_0, z_0 der Meridianebene v_s und v_z beide verschwinden und die daher im Punkt s_0, z_0 rein toroidal verlaufen.

Wird dagegen ein Wertepaar I_1, I_2 festgehalten, so bilden diejenigen Punkte der Meridianebene, in denen die Ungleichung (5)

$$I_2^2 \geq \frac{1}{s_0^2} [F^*(s_0, z_0) + I_1]^2$$

erfüllt ist, die also von Bahnen mit den betreffenden Werten I_1, I_2 erreicht werden können, das *erlaubte Gebiet*. Das *verbotene Gebiet* besteht aus den übrigen Punkten der Meridianebene. Keine zum Wertepaar I_1, I_2 gehörige Teilchenbahn kann in das verbotene Gebiet kommen. Das erlaubte Gebiet wird gebildet aus den Punkten aller zu gegebenen Werten I_1, I_2 möglichen Teilchenbahnen. Dabei braucht eine einzelne Bahn nicht das ganze, zu I_1, I_2 gehörende erlaubte Gebiet auszufüllen (d. h. jedem Punkt beliebig nahe kommen).

³ A n m. b. d. Korr.: Bei der Beschriftung der Abbildungen sind folgende Fehler unterlaufen:

Abb. 1-4: Abszisse und Ordinate sind mit I_1, I^2 (an Stelle von J_1, J_2) zu bezeichnen.

Abb. 5: An der Abszisse ist $-F^*$ (anstatt F^*) abgetra-

gen. Die Funktion F (oder F^*) ist eine Funktion von s und z . Da manche der im folgenden zu beschreibenden Diagramme durch Wahl einer geeigneten Koordinate $t(s, z)$ an Stelle von z einfacher werden, so sollen im folgenden die Koordinaten der Meridianebene s und t sein. Im besonderen ist hierin natürlich der Fall $t \equiv z$ enthalten. Es sei nun $t_0 = t(s_0, z_0)$, so daß alle Überlegungen, die oben für den Punkt s_0, z_0 angestellt worden sind, sich nun auf den Punkt s_0, t_0 beziehen.

Wenn man nun in dem I_1, I_2 -Diagramm den Wert für s_0 bei konstantem t_0 variiert, so kann man die Geraden des Paares (6) als zwei Geradenscharen auffassen, die vom Parameter s_0 abhängen. Solche Geradenscharen besitzen im allgemeinen eine Einhüllende. Eine Bedingung für die einhüllende Kurve erhält man aus (6) durch Differentiation nach s_0 :

$$I_2 = \pm \frac{\partial F^*(s_0, t_0)}{\partial s_0}.$$

Diese Gleichung bestimmt zusammen mit (6) die Gleichung der Einhüllenden, so daß diese also durch

$$I_1 = s_0 \frac{\partial F^*}{\partial s_0} - F^*, \quad I_2 = \pm \frac{\partial F^*}{\partial s_0} \quad (7)$$

gegeben ist. Wegen der Doppeldeutigkeit der zweiten Gleichung entspricht jedem Wert s_0 ein zur I_1 -Achse symmetrisches Punktpaar. Jedes charakteristische Geradenpaar, das zum Punkt s_0, t_0 gehört, berührt die Einhüllende in den beiden Punkten, die zum Parameterwert s_0 der Einhüllenden gehören (vgl. Abb. 2³).

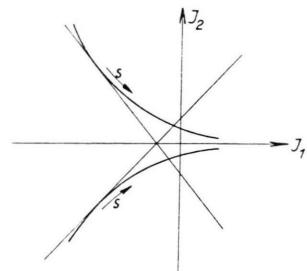


Abb. 2. Die Einhüllende der charakteristischen Geradenpaare für ein festes t_0 .

Von einem Punkt $P(I_1, I_2)$ kann man im allgemeinen ein oder mehrere charakteristische Geradenpaare konstruieren. Es seien z. B. zwei charakteri-

gen; J_1, J_2 sind durch I_1, I_2 zu ersetzen.

Abb. 16: J_1, J_2 sind durch I_1, I_2 zu ersetzen.

Abb. 12 b: $J_1 = -1,47$ (anstatt $J_1 = +0,2$).

Abb. 12 d: $J_1 = +0,2$ (anstatt $J_1 = -0,2$).

stische Geradenpaare, nämlich g, g' und h, h' (vgl. Abb. 3³⁾) konstruierbar. Dann entsprechen den beiden Geradenpaaren zwei Werte für s_0 , etwa s_g und s_h mit $s_g < s_h$. Die zum betreffenden Wertepaar I_1, I_2 gehörende Bahn verläuft also in den beiden Punkten

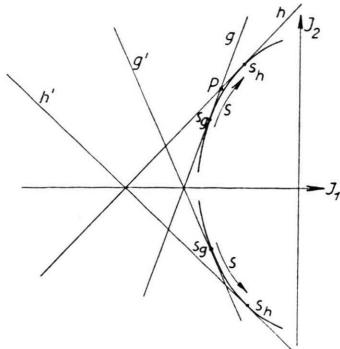


Abb. 3. Bestimmung von s_g, s_h für ein gegebenes Wertepaar I_1, I_2 . s -Werte mit $s_g < s < s_h$ bei festgehaltenem t_0 entsprechen Punkten in einem erlaubten Gebiet der Meridianebebene.

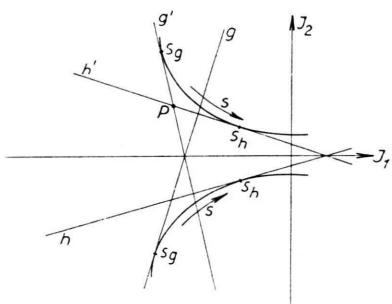


Abb. 4. Bestimmung von s_g, s_h wie in Abb. 3. s -Werte mit $s_g < s < s_h$ bei festgehaltenem t_0 entsprechen Punkten in einem verbotenen Gebiet der Meridianebebene.

(s_g, t_0) und (s_h, t_0) der Meridianebebene toroidal. Liegt nun P im Normalgebiet aller Zwischenpunkte (s_1, t_0) mit $s_g \leq s_1 \leq s_h$, so sind diese Zwischenpunkte erreichbare oder erlaubte Punkte (vgl. Abb. 3). Liegt dagegen P außerhalb der zu den Zwischenpunkten gehörigen Normalgebiete, so sind sie verbotene Punkte der Meridianebebene (vgl. Abb. 4³⁾).

2. Die Darstellung durch charakteristische Punktpaare

Die Bestimmung der Grenzen zwischen erlaubten und verbotenen Gebieten durch Konstruktion der Tangenten an die Einhüllende legt den Gedanken nahe, das im geometrischen *Simme-duale Verfahren* zu betrachten, bei dem den Geraden und Punkten

des vorigen Abschnittes Punkte und Geraden entsprechen und bei dem im vorigen Abschnitt konstruierten Tangenten an die Einhüllende jetzt Schnittpunkte entsprechen. Dieses duale Verfahren erhält man, wenn man einem Wertepaar I_1, I_2 die Gerade

$$I_1 x + I_2 y = 1 \quad (8)$$

in der $x-y$ -Ebene zuordnet. Diese Gerade schneidet die x -Achse bei $x = 1/I_1$, die y -Achse bei $y = 1/I_2$. Für Bahnen mit verschwindendem I_1 (I_2) erhält man eine zur x -Achse (y -Achse) parallele Gerade. Wegen $I_2 > 0$ dürfen die Bildgeraden (8) den negativen Teil der y -Achse nicht schneiden. Die Bedingung (5) schränkt nun die Mannigfaltigkeit aller durch (8) gegebenen Geraden ein. Wir betrachten dazu die Bedingung (6). Jeder Vorzeichenwahl dieser Bedingung entspricht eine nur noch von einem Parameter abhängige Geradenschar von (8), die man erhält, wenn man in (8) etwa I_2 gemäß (6) ersetzt. Läßt man dann I_1 alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so hüllen die Geraden (8) für jede Vorzeichenwahl von (6) je einen Punkt ein. Die Gln. (6), (8) bestimmen daher ein Punktpaar, dessen Koordinaten

$$x = -\frac{1}{F^*(s_0, t_0)}, \quad y = \pm \frac{s_0}{F^*(s_0, t_0)} \quad (9)$$

sind. Dieses Punktpaar, das symmetrisch zur x -Achse liegt, entspricht dual dem charakteristischen Geradenpaar des vorigen Abschnittes; wir nennen es das *charakteristische Punktpaar*. Zu jedem Raumpunkt s_0, t_0 gehört ein charakteristisches Punktpaar, und die Forderung (5) an die Wertepaare I_1, I_2 ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß zum Punkt s_0, t_0 nur solche Wertepaare I_1, I_2 gehören sollen, deren Bildgeraden zwischen dem charakteristischen Punktpaar hindurchgehen (oder durch mindestens einen Punkt des Paares). Wenn man nun t_0 festhält und s_0 variiert, so durchläuft das Punktpaar (9) eine zur x -Achse symmetrische Kurve. Den Parameter s_0 kann man sich wieder als Parameter an der Kurve angetragen denken, so daß jedem Punkt der Kurve ein Wert von s_0 entspricht.

Gibt man jetzt ein Wertepaar I_1, I_2 vor, so entspricht diesem gemäß (8) eine Gerade. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Kurve (9) (bei festem t_0) bestimmen eine Anzahl von s -Werten $s_1 < s_2 < s_3 \dots$. Diese Werte sind wieder Grenzen verbotener Bereiche (vgl. Abb. 5³⁾). Der Bereich zwischen s_1, s_2 ist genau dann ein erlaubter Bereich, wenn die Gerade (8) zwischen allen Punktpaaren

hindurchgeht, die zu s -Werten mit $s_1 < s < s_2$ gehören. In Abb. 5 ist daher das Intervall (s_1, s_2) ein verbotenes Gebiet, das Intervall (s_2, s_3) entspricht dagegen einem erlaubten Gebiet.

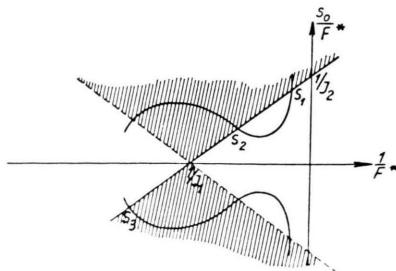


Abb. 5. Bestimmung von erlaubten und verbotenen Gebieten im $-1/F^*, s/F^*$ -Diagramm.

Da die hier beschriebene Darstellungsweise und die in Abschn. 2 behandelte einander dual entsprechen, so sind beide völlig gleichwertig. Das letztere besitzt im allgemeinen den Vorteil der größeren Anschaulichkeit, der leichteren Berechnung der Kurve (9) gegenüber der Einhüllenden (7) und der leichteren Bestimmung der Schnittpunkte gegenüber der ungenauerer Konstruktion von Tangenten. Die Darstellung in der I_1, I_2 -Ebene hat demgegenüber den Vorteil, daß man aus der zu jedem t_0 -Wert gehörigen Einhüllenden im $I_1 - I_2$ -Diagramm zu jedem Wertepaar I_1, I_2 sofort die Zahl der Tangenten an die Kurve (7) angeben kann und sieht, welche Teile der Fläche $t = t_0$ zu einem erlaubten, und welche zu einem verbotenen Gebiet gehören. Außerdem ist jede Funktion $f(I_1, I_2)$ gleichzeitig eine stationäre Lösung der BOLTZMANN-Gleichung. Diese Eigenschaft des $I_1 - I_2$ -Diagramms kann für statistische Untersuchungen ausgenutzt werden (vgl. Abschn. 6).

Die Bestimmung der erlaubten und verbotenen Gebiete nach einem der beiden beschriebenen Verfahren wird dann besonders einfach, wenn die Funktion F^* in bezug auf die Variablen s_0, t_0 einfache Transformationseigenschaften besitzt. In dem im 4. Abschnitt behandelten Beispiel des Dipolfeldes wird sich erweisen, daß man hier aus den Verhältnissen in einer Ebene $z = \text{const} \neq 0$ die nötigen Informationen für alle anderen, dazu parallelen Ebenen ablesen kann.

Man kann die Gln. (9) deuten als Abbildung der Meridianebeine auf die $x - y$ -Ebene. Entsprechend den beiden möglichen Vorzeichen von y in (9) wird jedem Punkt s_0, t_0 ein zur x -Achse symmetrisches Punktpaar zugeordnet. Im allgemeinen Fall wird

nur ein Teil der $x - y$ -Ebene und dieser einfach oder gebietsweise mehrfach von Bildpunkten überdeckt werden. Diese von uns zunächst rein formal als duales Gegenstück zum $I_1 - I_2$ -Diagramm eingeführte Transformation hat den folgenden Vorteil: Die durch Gl. (6) implizit gegebenen Grenzen zwischen erlaubten und verbotenen Gebieten sind im allgemeinen krummlinige Kurven in der Meridianebeine. Der Vergleich von (6) und (8) zusammen mit den Transformationsgleichungen (9) zeigt, daß diese Kurven für alle Wertepaare I_1, I_2 durch die Abb. 9 in die Geraden überführt werden, die durch (8) bestimmt sind. Dabei besteht das zum Wertepaar I_1, I_2 gehörende erlaubte Gebiet aus dem von der Geraden (8) und ihrem Spiegelbild an der x -Achse gebildeten Zwickel (in Abb. 5 schraffiert). Für alle Punktpaare $x_0, \pm y_0$ aus diesem Zwickel gilt nämlich, daß die Gerade (8) zwischen den beiden Punkten eines Paares hindurchgeht, also die Ungleichung (5) erfüllt ist.

Die Abb. (9) kann bei bekanntem Magnetfeld, d. h. bekanntem $F^*(s, t)$ wegen ihrer Unabhängigkeit von I_1 und I_2 für alle Bahnen ausgeführt werden. Die meist nicht-triviale Bestimmung der Grenzen erlaubter Gebiete in der Meridianebeine kann in der $x - y$ -Ebene für beliebige Paare I_1, I_2 durch einfache Konstruktion der Geraden (8) erfolgen, indem man etwa die $x - y$ -Ebene mit einem Netz von Kurven $s = \text{const}$ und $t = \text{const}$ überzieht.

3. Das $s - F$ -Diagramm

Man kann nun aus der durch (8) und (9) vermittelten Darstellung mit Hilfe von Transformationen der Koordinaten x, y , welche Geraden in Geraden überführen, weitere Abbildungen der Meridianebeine finden, bei denen die Grenzen zwischen erlaubten und verbotenen Gebieten wieder Geraden sind. Die dem Problem angemessenste Abbildung scheint die durch

$$x' = -y/x, \quad y' = -1/x$$

gegebene zu sein⁴. Die Geraden (8) gehen über in

$$I_2 x - y - I_1 = 0, \quad (10)$$

die durch (9) gegebenen Punktpaare in

$$y = F^*, \quad x = \pm s. \quad (11)$$

⁴ Auf die Vorteile dieser Transformation hat uns A. SCHLÜTER aufmerksam gemacht.

Hierbei sind die Striche an x und y wieder weggelassen.

Die Darstellung (11) hat gegenüber der Darstellung (9) den Vorteil, daß sie einfacher ist und daß sie der Tatsache gerecht wird, daß F nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist; das Diagramm in der Darstellung (11) wird nicht geändert, sondern nur in der y -Richtung verschoben, wenn man F durch $F + \text{const}$ ersetzt.

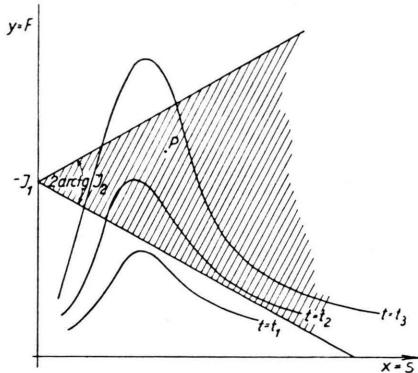


Abb. 6. Der Bildbereich eines erlaubten Gebietes der Meridianebene im $s-F$ -Diagramm.

Man kann sich beim Zeichnen des Diagramms (11), das symmetrisch zur x -Achse liegt, mit der Hälfte des Diagramms begnügen, die man erhält, wenn man (11) durch

$$x = s, \quad y = F^* \quad (11')$$

ersetzt und statt der Geraden (10) die beiden Geraden

$$\pm I_2 x - y - I_1 = 0 \quad (10')$$

zeichnet. Die beiden Geraden schließen ein Gebiet der rechten Halbebene ein (vgl. Abb. 6³). Alle zu den Punkten des eingeschlossenen Gebietes gehörigen Wertepaare s, t entsprechen erlaubten Punkten der Meridianebene. Man kann daher (11') als eine Abbildung der Meridianebene auf die rechte Halbebene des $x-y$ -Diagramms ansehen, welche die Grenzlinien zwischen erlaubten und verbotenen Gebieten in Geraden überführt und die erlaubten Gebiete der Meridianebene in das durch die beiden Geraden (10') eingeschlossene Gebiet der rechten Halbebene (in Abb. 6 schraffiert).

Aus dem $s-F$ -Diagramm kann man darüber hinaus unmittelbar den Verlauf der Feldlinien konstruieren. Jede Kurve $F^* = \text{const}$ im Diagramm, d. h. jede zur x -Achse parallele Gerade ordnet s - und z -

Werte einander zu. Dieser Zuordnung entspricht in der Meridianebene eine Feldlinie des Magnetfeldes, die ja allgemein durch $F = \text{const}$ gegeben sind.

4. Anwendung auf das Dipolfeld

Die Funktion

$$F(s, z) = \frac{M s^2}{(s^2 + z^2)^{3/2}} = M F_D(s, z) \quad \left(F_D = \frac{s^2}{(s^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

beschreibt das Magnetfeld eines Dipols mit dem magnetischen Moment M . Setzt man

$$b = \frac{Z e}{m c} M, \quad J_1 = \frac{1}{b} I_1, \quad J_2 = \frac{1}{b} I_2,$$

dann erhält man an Stelle von (6)

$$J_2 = \pm \frac{1}{s} (J_1 + F_D).$$

Es gelten alle oben für I_1, I_2 und F^* abgeleiteten Relationen und Diagramme auch für J_1, J_2 und F_D .

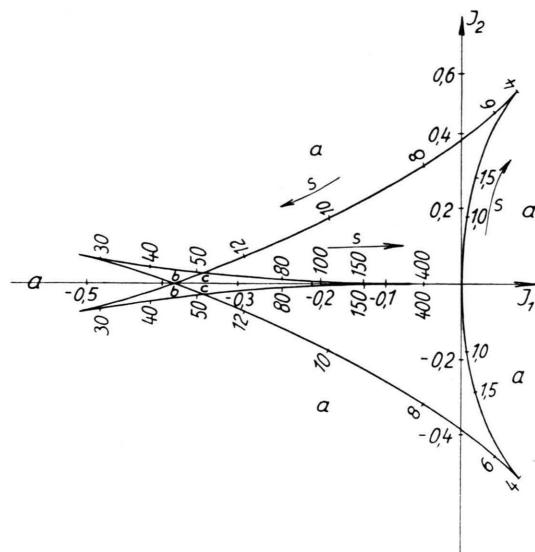


Abb. 7. Das J_1-J_2 -Diagramm des Dipolfeldes für $t \equiv z$.

Wählt man $t \equiv z$ und betrachtet die Ebene $z = 1$, so erhält man in der J_1-J_2 -Ebene gemäß (7) die in Abb. 7 wiedergegebene Kurve, an die s als Parameter angetragen worden ist. Ein allgemeiner Bildpunkt im J_1-J_2 -Diagramm für die Ebene $z = 1$ besitzt 1, 3 oder 5 Tangenten an die Einhüllende (7), je nachdem, ob er in den Gebieten a, b oder c liegt. Ein Diagramm wie die Abb. 7 gestattet also unmittelbar die Schnitte der Ebene $z = 1$ mit den Grenzflächen zwischen erlaubten und verbotenen

Gebieten zu bestimmen. Sie gestattet dies aber auch für alle anderen Ebenen $z = \text{const} \neq 0$, da im Falle des Dipolfeldes die Funktion F_D die Identität

$$F_D(s, z) = \lambda F_D(\lambda s, \lambda z) \quad (12)$$

erfüllt. Damit ist es möglich, die Verhältnisse in der Ebene $z = 1$ auf jede Ebene $z = \lambda \neq 0$ zu übertragen. Will man die Grenzen zwischen erlaubten und verbotenen Gebieten der zu J_1, J_2 gehörigen Bahnen in der Ebene $z = \lambda$ bestimmen, so betrachte man die Grenzen, die zum Wertepaar $\lambda^{-1} J_1, \lambda^{-2} J_2$ in der Ebene $z = 1$ gehören. Die durch Tangentenkonstruktion bestimmbar Werte $s_1, s_2 \dots$ multipliziere man mit λ und man erhält die Achsenabstände der Grenzen zwischen erlaubten und verbotenen Gebieten der zu J_1 und J_2 gehörigen Bahnen in der Ebene $z = \lambda$. Daß diese Vorschrift tatsächlich die Verhältnisse in der Ebene $z = \lambda$ liefert, folgt durch die aus (12) herleitbaren Relationen für die Punkte J_1, J_2 der Kurve (7):

$$J_1(s, 1) = \lambda J_1(\lambda s, \lambda),$$

$$J_2(s, 1) = \lambda^2 J_2(\lambda s, \lambda).$$

Beim Dipolfeld zeigt es sich deutlich, wie die Diagramme durch Wahl einer passend gewählten Funktion t einfacher und übersichtlicher werden.

Führt man in der $s-z$ -Ebene die „Poldistanz“ ϑ durch $\sin \vartheta = s/(s^2 + z^2)^{1/2}$ ein und setzt $t \equiv \sin \vartheta$, so wird

$$F_D = \frac{\sin^3 \vartheta}{s}.$$

Für festes ϑ mit $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ erhält man als Parameterdarstellung für die Einhüllende

$$J_1 = s \frac{\partial F_D}{\partial s} - F_D = - \frac{2 \sin^3 \vartheta}{s},$$

$$J_2 = \pm \frac{\partial F_D}{\partial s} = - \frac{\sin^3 \vartheta}{s^2}.$$

Die Einhüllenden werden also durch je zwei Parabeläste

$$J_2^2 = \pm 4 \sin^3 \vartheta J_2 \quad (J_1 \leqq 0)$$

gebildet. Abb. 8 zeigt die Einhüllenden für einige ϑ -Werte. Längs jeder Parabel muß man sich wieder die Parameterwerte s abtragen denken. Eliminiert man $\sin^3 \vartheta$ aus der Parameterdarstellung für die Einhüllende, so folgt

$$J_2 = \pm \frac{1}{2s} J_1.$$

Verbindet man also die zu gleichem s gehörigen Punkte aller Einhüllenden, so entsteht eine Gerade;

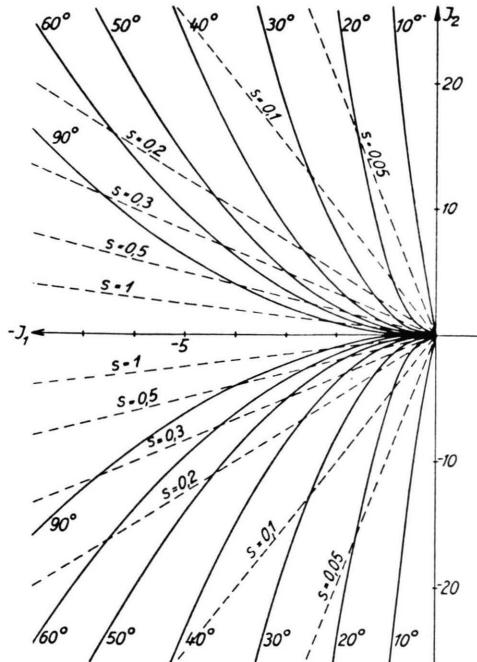


Abb. 8. Das J_1-J_2 -Diagramm des Dipolfeldes für $t \equiv \sin \vartheta$.

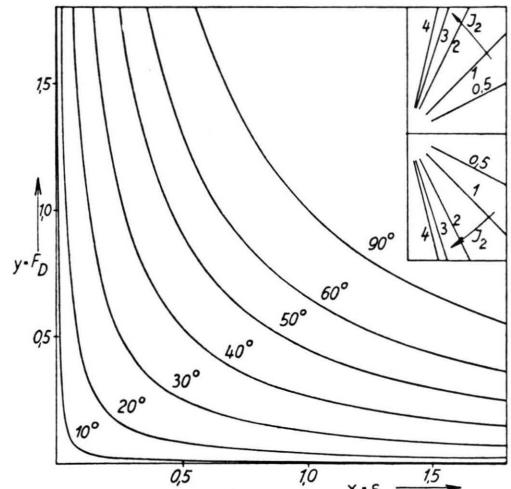


Abb. 9. Das $s-F$ -Diagramm des Dipolfeldes für $t \equiv \sin \vartheta$. Die rechts oben konstruierten Geraden dienen zur leichteren Bestimmung der zu J_2 gehörigen Richtungen.

für einige s -Werte sind diese Geraden in Abb. 8 gestrichelt eingetragen.

Links von den zu $\vartheta = \pi/2$ gehörigen Parabelästen liegen J_1, J_2 -Paare, welche genau drei Tangenten an die zu jedem ϑ gehörigen zwei Parabeläste besitzen; rechts davon liegen Punkte, durch die – abhängig vom betreffenden ϑ -Wert – eine oder drei Tangenten gehen.

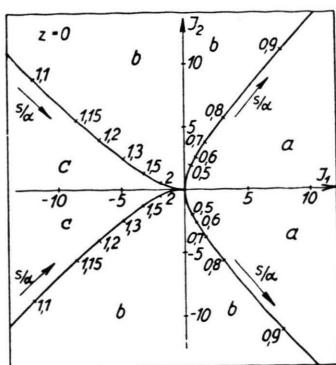


Abb. 10.

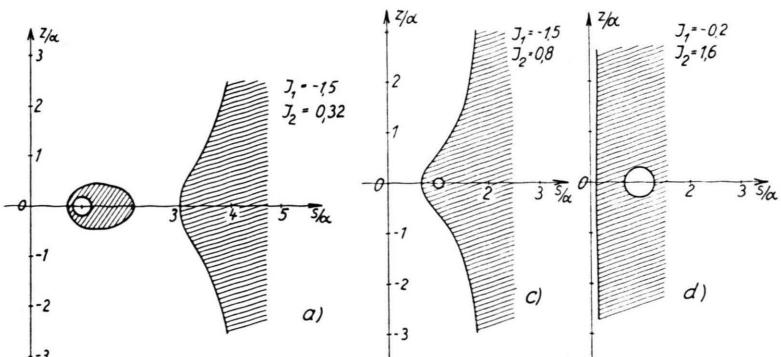


Figure 10 consists of two plots, (b) and (e), showing the dependence of the energy parameter on the parameter α . Both plots have axes labeled z/α and s/α .

Plot (b) shows a curve with a loop and a shaded region. The parameters are $J_1 = +0.2$ and $J_2 = 0.32$. The z/α axis ranges from -2 to 2, and the s/α axis ranges from 0 to 5.

Plot (e) shows a curve with a loop and a shaded region. The parameters are $J_1 = +0.8$ and $J_2 = 0.8$. The z/α axis ranges from -3 to 3, and the s/α axis ranges from 0 to 5.

Abb. 12.

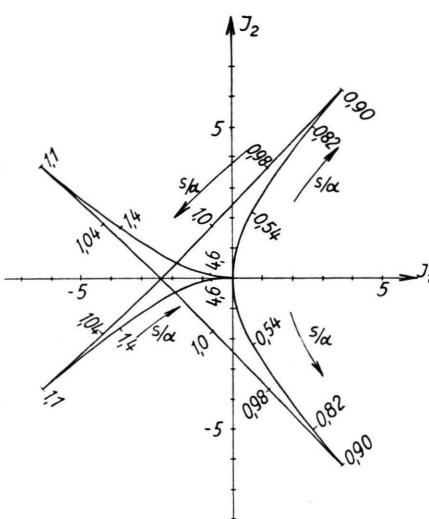


Abb. 11.

Für das hier betrachtete Dipolfeld wird die Abbildung der Meridianebene nach dem $s - F$ -Verfahren [Gl. (11')] bestimmt durch

$$y = \frac{\sin^3 \vartheta}{s}, \quad x = s.$$

Die Geraden $\vartheta = \text{const}$ der Meridianebene werden also auf Hyperbeln $xy = \text{const}$ abgebildet (Abb. 9).

5. Das Feld des Kreisstromes

Fließt durch einen Kreis vom Radius α in der Ebene $z=0$ mit dem Mittelpunkt auf der z -Achse ein Strom der Stärke i , dann erhält man für die einzige nicht verschwindende Komponente A_φ des Vektorpotentials

$$A_\varphi = \frac{i\alpha}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \delta \, d\delta}{(s^2 + \alpha^2 + z^2 - 2\alpha s \cos \delta)^{1/2}}.$$

⁵ C. STÖRMER, Arch. des Sci. phys. et nat., Genf 1911, t. XXXII, p. 53.

Führt man die Größe $\chi^2 = \frac{4 \alpha s}{(s+\alpha)^2 + z^2}$ ein, so lässt sich A_φ durch die vollständigen elliptischen Integrale E und K ausdrücken:

$$A_\varphi = \frac{2i}{c} \sqrt{\frac{\alpha}{s}} \left[\frac{2-\varkappa^2}{\varkappa} K(\varkappa) - \frac{2}{\varkappa} E(\varkappa) \right].$$

Setzt man in Gl. (2) $T=0$ und identifiziert ihre rechte Seite mit rot \mathfrak{A} , so folgt $F = s A_\varphi$. Damit erhalten wir für F :

$$F = \frac{2i}{c} \sqrt{\alpha s} \left[\frac{2-\kappa^2}{\kappa} K(\kappa) - \frac{2}{\kappa} E(\kappa) \right].$$

Diese Darstellung für F ist bereits bei STÖRMER zu finden.⁵

Hier definieren wir ein F_k zu

$$F = \frac{2i\alpha}{c} F_K,$$

$$F_K = \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \left[\frac{2 - \alpha^2}{\alpha} K(\alpha) - \frac{2}{\alpha} E(\alpha) \right],$$

außerdem sei

$$b = \frac{Z e}{m c} \frac{2 i \alpha}{c}, \quad J_1 = \frac{1}{b} I_1, \quad J_2 = \frac{\alpha}{b} I_2.$$

Man erhält dann an Stelle von (6)

$$J_2 = \pm \frac{\alpha}{s} (J_1 + F_K).$$

J_1 , J_2 und F_K sind dimensionslos, und es gelten für sie die für I_1 , I_2 und F^* hergeleiteten Beziehungen.

In Abb. 10 ist ein $J_1 - J_2$ -Diagramm für $z = 0,1$ dargestellt. Es hat die gleiche topologische Struktur wie das $J_1 - J_2$ -Diagramm des Dipolfeldes. Auch hier gibt es wieder Gebiete mit 1, 3 und 5 Tangenten. Jeder Tangente entspricht ein Schnittpunkt der Geraden $z = 0,1$ in der Meridianebene mit Grenzen verbotener Gebiete. Abb. 11 zeigt das $J_1 - J_2$ -Diagramm für $z = 0$. Wegen der logarithmischen Singularität von F_K bei $s = \alpha$ liegt der zu $s = \alpha$ gehörige Punkt im Unendlichen. Es gibt von einem Punkt J_1, J_2 wieder 1, 3 oder 5 Tangenten an die Einhüllende, je nachdem, ob der Punkt in den Gebieten a, b oder c liegt. In Abb. 12³ sind verschiedene Typen von erlaubten und verbotenen Gebieten gezeichnet. Abb. 13 gibt das $s - F$ -Diagramm für das Feld des Kreisstromes wieder. An die Kurven ist jeweils z/α als Scharparameter angeschrieben. Aus ihm lassen sich Koordinatenpaare $s/\alpha, z/\alpha$ für die Grenzen erlaubter Gebiete bei vorgegebenem Wertepaare J_1, J_2 ablesen.

6. Das Teilchenverlustproblem für das Feld eines Kreisstromes

Wie aus Abb. 12 a hervorgeht, kann ein Kreisstrom Teilchen mit gewissen Werten für Energie und verallgemeinerten Drehimpuls (I_1) in einem endlichen Volumen halten. Bringt man jedoch eine Anzahl von Teilchen in das Magnetfeld, deren Energie- (und evtl. auch Drehimpulsverteilung) durch eine Verteilungsfunktion beschrieben wird – etwa Teilchen mit MAXWELL-Verteilung –, so wird es im allgemeinen in jedem Punkte Teilchen geben, die immer in einem endlichen Volumen bleiben und solche, die entweichen können. Damit ergibt sich das folgende Problem: Vorgegeben sei das Feld eines Kreisstromes. In einem Punkt P der Meridianebene seien die Teilchen durch die Verteilungsfunktion f beschrieben, wobei f vom Ortsvektor r und vom Geschwindigkeitsvektor v abhängen möge.

$$n = \int f(r, v) d^3 v$$

stellt dann die Teilchendichte dar; sie läßt sich aufspalten in zwei Anteile

$$n = n_0 + n_{\text{entw.}},$$

wobei n_0 die Zahl der Teilchen angibt, die in einem endlichen Volumen gehalten werden, $n_{\text{entw.}}$ die Zahl der entweichenden Teilchen, d. h. der Teilchen, deren erlaubte Gebiete Verbindungen haben mit dem Unendlichen (vgl. Abb. 12).

Darüber hinaus soll noch die folgende Aufgabe betrachtet werden. Von den in n gezählten Teilchen haben die (im Endlichen liegenden) Grenzen der erlaubten Gebiete im allgemeinen noch verschiedene Maximalabstände von der Symmetrieachse. Dementsprechend kann man die Teilchendichte n_0 aufspalten in

$$n_0 = n_{< s_0} + n_{> s_0},$$

wobei $n_{< s_0}$ die Zahl der Teilchen ist, deren (endliches) erlaubtes Gebiet nur Punkte enthält, deren Abstand von der Symmetrieachse $< s_0$ ist.

Im folgenden werden Methoden angegeben, nach denen man für den Fall des Feldes eines Kreisstromes die Teilchendichten n_0 und $n_{< s_0}$ mit Hilfe der $J_1 - J_2$ -Diagramme berechnen kann. Die Methode läßt sich sinngemäß auf andere Felder übertragen.

Wie man in Abb. 12 sieht, haben die endlichen erlaubten Gebiete ihren größten Achsenabstand in der Ebene $z = 0$. Ferner ist ein erlaubtes Gebiet endlich, wenn die Gerade $z = 0$ der Meridianebene fünf Schnittpunkte mit Grenzlinien hat.

Um für einen Punkt s_0, z_0 der Meridianebene n_0 zu bestimmen, muß man also die Teilchen zählen, deren erlaubte Gebiete die Gerade $z = 0$ der Meridianebene fünfmal schneiden. Das sind alle die Teilchen, deren Bildpunkt $P(J_1, J_2)$ so im J_1, J_2 -Diagramm für $z = 0$ liegt, daß man von P aus fünf Tangenten an die Einhüllende konstruieren kann.

Wir setzen nun die Verteilungsfunktion in der Form $f = f(J_1, J_2)$ voraus. Jede willkürliche (den nötigen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen genügende) Funktion von J_1, J_2 ist eine stationäre Lösung der BOLTZMANN-Gleichung (ohne Berücksichtigung der Stöße). Im besonderen ist in unserem Ansatz für f die MAXWELL-Verteilung enthalten, bei der f nur von J_2 abhängt.

Wählen wir statt I_1, I_2 (oder J_1, J_2 – die Unterscheidung zwischen I und J hat im folgenden keine Bedeutung mehr –) die Geschwindigkeitskomponenten v_s, v_φ, v_z als Argumente von f , so können v_s und v_z wegen der Gln. (3) und (4) nur

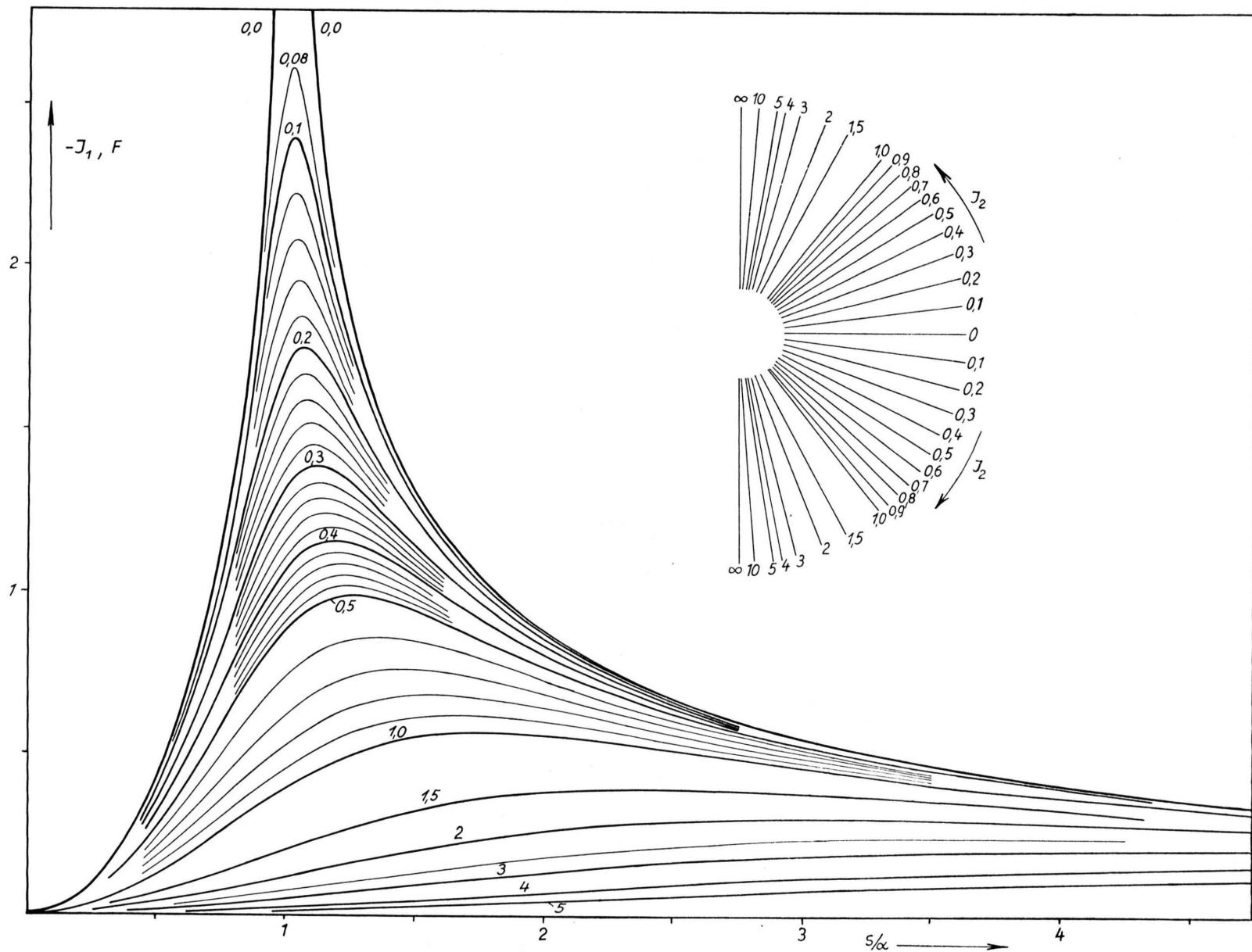


Abb. 13. Das $s-F$ -Diagramm des Feldes eines Kreisstromes. Die Kurven stellen die Funktion $F_K(s/\alpha)$ für verschiedene Werte z/α dar. Der Parameterwert z/α ist jeweils an die Kurven angeschrieben. Die rechts oben konstruierten Geraden dienen zur leichteren Bestimmung der zu J_2 gehörigen Richtungen.

in der Kombination $v_s^2 + v_z^2 = v_M^2$ auftreten; v_M ist die zur jeweiligen Meridianebene parallele Geschwindigkeitskomponente. Jedem Wertepaar I_1, I_2 entspricht bei festen Werten von s und z im dreidimensio-

noch auf die Variablen I_1, I_2 transformiert werden. Es ist

$$d^3v = 2 \pi v_M dv_M dv_\varphi .$$

Nach (3) und (4) gilt

$$v_M = \sqrt{I_2^2 - \left(\frac{F^* + I_1}{s}\right)^2}, \quad v_\varphi = \frac{F^* + I_1}{s},$$

daraus folgt

$$dv_M dv_\varphi = \frac{I_2}{s v_M} dI_1 dI_2 .$$

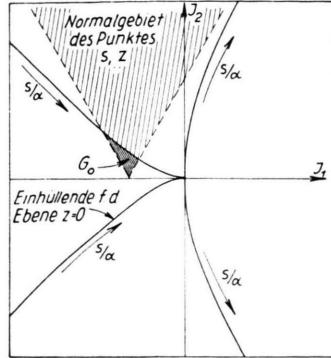


Abb. 14. Das Integrationsgebiet G_0 zur Bestimmung der Teilchendichte n_0 .

nalen Cartesischen Geschwindigkeitsraum ein Kreis parallel zur $v_s - v_z$ -Ebene mit dem Radius v_M , dessen Mittelpunkt auf der v_φ -Achse liegt und den Abstand v_φ vom Ursprung hat.

Zum Punkt s, z der Meridianebene gehört ein durch das charakteristische Geradenpaar (6) definiertes Normalgebiet. Nur die im Normalgebiet liegenden Wertepaare I_1, I_2 gehören zu reellen Geschwindigkeitskomponenten.

Es sei G das Gebiet im Geschwindigkeitsraum, über das die Funktion f bei der Berechnung von n_0 zu integrieren ist. Die Punkte aus G müssen dann der Bedingung genügen, daß die zugehörigen I_1, I_2 -Punkte 1. zum Normalgebiet des betrachteten Punktes s, z gehören und 2. im I_1, I_2 -Diagramm 5 Tangenten an die Einhüllende für $z=0$ haben. Hieraus ergibt sich eine einfache Vorschrift, wie das zu G gehörige Gebiet G_0 im I_1, I_2 -Diagramm zu konstruieren ist (Abb. 14).

Nun muß das Integral

$$n_0 = \int f(v_M, v_\varphi) d^3v$$

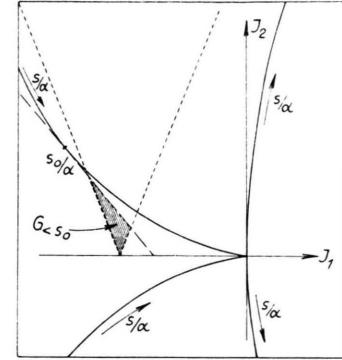


Abb. 15. Das Integrationsgebiet $G_{<s_0}$ zur Bestimmung der Teilchendichte $n_{<s_0}$.

Also haben wir

$$n_0 = \int_G f(v_M, v_\varphi) d^3v = \frac{2 \pi}{s} \int_{G_0} f(I_1, I_2) I_2 dI_1 dI_2 .$$

Für die Bestimmung der Teilchendichte $n_{<s_0}$ hat man nur über ein Teilgebiet $G_{<s_0}$ von G_0 zu integrieren. Dieses Teilgebiet ist dadurch definiert, daß unter den von jedem seiner Punkte aus konstruierbaren Tangenten die zum zweitgrößten s -Wert gehörige Tangente die Einhüllende in einem Punkt berührt, dessen s -Wert $s \leq s_0$ ist (vgl. Abb. 15).

Die Verfasser danken Herrn Dr. A. SCHLÜTER für Ratschläge und für sein Interesse an dieser Arbeit.